ЛЕКЦИЯ 10

ЛИНЕЙНАЯ В ЛОГАРИФМАХ МОДЕЛЬ.
ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАРЕМБКИ.
ТЕСТ БОКСА-КОКСА

Рассматриваем модель парной регрессии

Линейная регрессия:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Интерпретация коэффициента β_2 – это предельный эффект независимой переменной: $\beta_2 = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, т.е. β_2 показывает прирост зависимой переменной при изменении регрессора на 1 единицу.

Введем понятие эластичности:

$$elasticity = \frac{dY/Y}{dX/X}$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько % изменится Y при изменении X на 1%.

Покажем, что для линейной модели коэффициент эластичности зависит от X:

$$elasticity = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY/dX}{Y/X} = \frac{d\left(\beta_1 + \beta_2 X\right)/dX}{Y/X} =$$

$$= \frac{\beta_2}{\left(\beta_1 + \beta_2 X\right)/X} = \frac{\beta_2}{\frac{\beta_1}{X} + \beta_2}$$

Если есть основание предполагать постоянство эластичности, то от линейной модели переходят к логарифмической.

Логарифмическая модель имеет вид:

$$Y = \beta_1 \cdot X^{\beta_2} \cdot u$$

Покажем, что для этой модели коэффициент эластичности является постоянным и не зависит от X.

$$elasticity = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY/dX}{Y/X} = \frac{d\left(\beta_1 \cdot X^{\beta_2}\right)/dX}{\left(\beta_1 \cdot X^{\beta_2}\right)/X} =$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2 \cdot X^{\beta_2 - 1}}{\beta_1 \cdot X^{\beta_2 - 1}} = \beta_2$$

Обратите внимание на полученный результат!

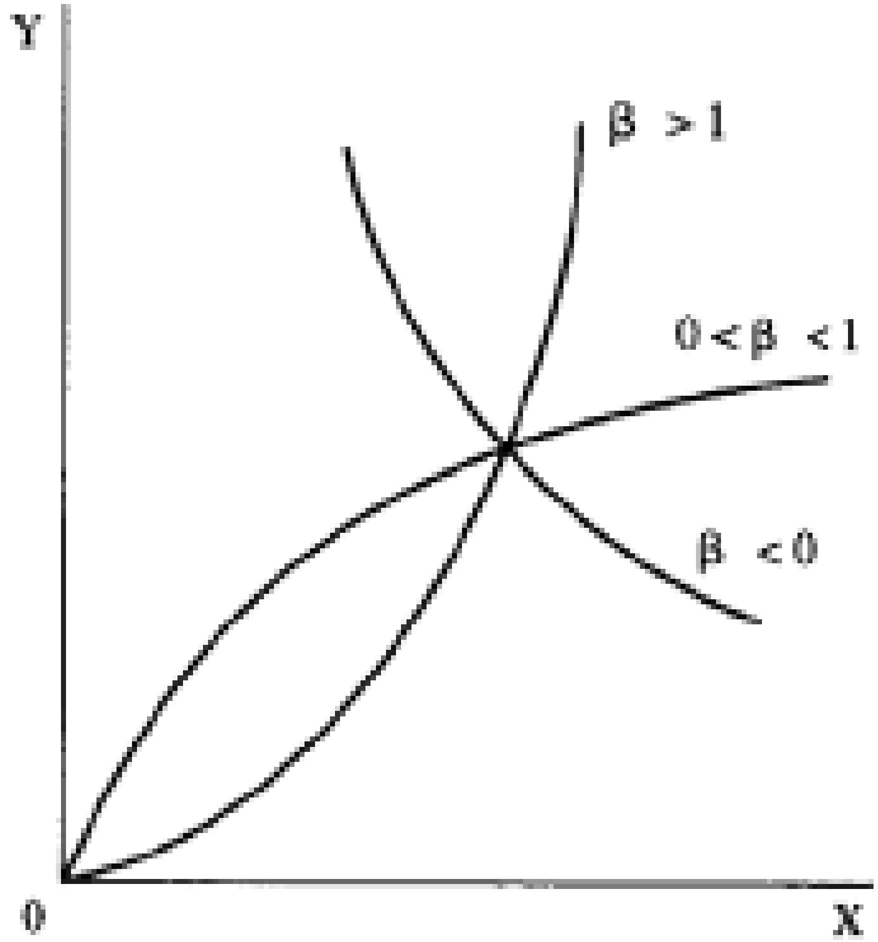
Логарифмическая модель может быть линеаризована путем взятия логарифма от левой и правой части равенства (линеаризующее преобразование):

$$Y = \beta_1 \cdot X^{\beta_2} \cdot u$$

$$\ln Y = \ln \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln X + \ln u$$

Затем модель может быть оценена МНК

На схеме приведены зависимости с различными значениями эластичности:



Полулогарифмическая модель

Используется для моделирования эффектов насыщения на уровне скорости роста

$$Y = \beta_1 \cdot \exp(\beta_2 X) \cdot u$$

Логарифмируем:

$$\ln Y = \ln \beta_1 + \beta_2 \cdot X + \ln u$$

Коэффициент эластичности:

$$elasticity = \frac{dY/Y}{dX/X} = \beta_2 X$$

Интерпретация коэффициента эластичности для полулогарифмической модели:

если X изменится на 1 единицу, то Y изменится на $\beta_2 \cdot 100\%$

Какую модель предпочесть – линейную или же в логарифмах?

Для ответа на этот вопрос следует провести сначала содержательный анализ, а также формальный анализ:

- Метод Зарембки
- Тест Бокса-Кокса

Метод Зарембки

Применим для выбора из двух форм моделей, которые не могут быть сравнимы непосредственно (в одну из моделей Y входит напрямую, а другую – с логарифмом)

Алгоритм:

1. Вычисляется среднее геометрическое значений зависимой переменной и каждое ее значение делится на это среднее.

$$Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt[n]{Y_1 Y_2 \ldots Y_n}} = \frac{Y_i}{\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln Y_i\right)}$$

2. Находятся МНК-оценки для линейной и полулогарифмической моделей и находятся суммы квадратов остатков для обеих регрессий

$$Y^* = \beta_1 + \beta_2 X + u \qquad (1)$$

для этой модели находим RSS_1

$$\ln Y^* = \ln \beta_1' + \beta_2' \cdot X + \ln u' \qquad (2)$$

для этой модели находим RSS_2

3. Составляем тестовую статистику, которая имеет хи-квадрат распределение с 1 степенью свободы:

$$\chi^2 = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left| \ln \frac{RSS_1}{RSS_2} \right|$$

4. Если $\chi^2 > \chi_1^2$, то гипотеза относительно того, что модели (1) и (2) не имеют статистически значимых различий, <u>отвергается</u>.

5. Из двух построенных моделей следует выбрать ту, для которой RSS будет меньше.

Тест Бокса-Кокса (Box-Cox)

Идея:

Вводится новая переменная с параметром: $\dfrac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}$.

Эта переменная при $\lambda=1$ переводит нас к обычной линейной форме, а при $\lambda\to 0$ к логарифмической.

Плавно меняя λ, можно переходить от линейной формы к логарифмической, все время контролируя качество построенных моделей.

Алгоритм:

1. Преобразуем зависимую переменную по методу Зарембки:

$$Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt[n]{Y_1 Y_2 \ldots Y_n}} = \frac{Y_i}{\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i\right)}$$

2. Рассчитываем новые переменные (преобразование Бокса-Кокса) при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_{BC} = \frac{Y^{*\lambda} - 1}{\lambda}, \quad X_{BC} = \frac{X^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

3. Рассчитываем регрессии для всех значений λ от 1 до 0:

$$Y_{BC} = \beta_1 + \beta_2 X_{BC} + u$$

4. На каждом шаге контролируем сумму квадратов остатков, находим минимальную, и выбираем ту из крайних регрессий, к которой ближе точка минимума RSS.