ЛЕКЦИЯ 17

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ОЦЕНИВАНИЕ МОДЕЛЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛАГАМИ

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ (ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ)

Эконометрические модели, которые в качестве регрессоров включают лаговые переменные, относятся к классу динамических моделей.
Все динамические модели можно разделить на два типа:
авторегрессионные модели, в которых включаются значения эндогенной переменной в предыдущие моменты времени;
модели с распределенными лагами (distributed lags, DL(q)) – в них включаются значения регрессоров в предыдущие моменты.

Авторегрессионная модель при наличии автокорреляции остатков

Пусть в динамической регрессионной модели используются *лаговые* значения эндогенной переменной, т.е. они играют роль регрессоров (<u>стохастический регрессор</u>).
Например,

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \qquad (1)$$

Наша задача: проверить наличие автокорреляции случайных возмущений в такой модели.
Мы предполагаем, что

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1 \qquad (1a)$$

Статистика Дарбина-Уотсона для модели со стохастическими регрессорами неприменима.

Для того, чтобы это понять, запишем уравнение (1) для предыдущего момента времени:

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 Y_{t-2} + u_{t-1} \qquad (2)$$

Поскольку u_{t-1} определяет u_t через соотношение (1a), то оказывается, что u_t и Y_{t-1} коррелированы.

Поэтому в динамических моделях при наличии лаговых значений эндогенной переменной для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции используется h-статистика Дарбина.

Формулируем гипотезы:

$$H_0: \ \rho = 0$$

$$H_1: \ \rho \neq 0$$

Статистика Дарбина имеет вид:

$$h = \hat{\rho} \cdot \sqrt{\frac{T}{1 - T s^2_{b_{Y_{t-1}}}}} \qquad (3)$$

В формуле (3):

$s^2_{b_{Y_{t-1}}}$ оценка дисперсии коэффициента при лаговой переменной Y_{t-1}

T – количество наблюдений (моментов времени)

$\hat{\rho}$ оценка параметра авторегрессии. В качестве $\hat{\rho}$ можно взять значение статистики Дарбина-Уотсона:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

Для достаточно большого количества наблюдений h-статистика Дарбина ведет себя как стандартная нормальная случайная величина.

Следовательно, если $|h| > h_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

К сожалению, могут возникнуть ситуации, когда знаменатель подкоренного выражения $1 - Ts^2_{b_{Y_{t-1}}} < 0$, и статистика Дарбина неприменима.

Для таких ситуаций используется <u>альтернативный тест Дарбина</u>:

1. Оцениваем модель $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$
2. Сохраняем остатки $e_t = Y_t - \hat{Y}_t, \; t = 1, \ldots, T$
3. Оцениваем новую модель

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + \alpha e_{t-1} + u_t$$

4. Проверяем с помощью *t*-теста статистическую значимость параметра α. Если этот параметр значим, нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.

Модели с распределенными лагами. Модель геометрических лагов Койка

Модели с распределенными лагами – это модели, включающие в качестве лаговых объясняющих переменных регрессоры.
Например,

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + u_t \qquad (4)$$

Различают модели с конечным и бесконечным числом лагов:

- с конечным числом лагов:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{k} \beta_i X_{t-i} + u_t \qquad (5)$$

В этой модели β_0 называется краткосрочным мультипликатором (он характеризует изменение среднего значения Y под воздействием единичного изменения X, относящегося к тому же моменту времени).

Сумма $\sum_{i=0}^{k} \beta_i$ называется долгосрочным мультипликатором, т.к. она характеризует изменение Y под влиянием X в каждый из рассматриваемых моментов.

- с бесконечным числом лагов:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + u_t \qquad (6)$$

В дальнейшем будем ориентироваться на модель (6). При оценке таких моделей, относительно параметров можно сделать ряд предположений.

Предполагаем, что значения параметров при лаговых значениях регрессоров убывают в геометрической прогрессии:

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k, \;\; k = 0,1,2..., \;\; 0 < \lambda < 1 \qquad (7)$$

Параметр λ характеризует скорость убывания коэффициентов с увеличением лага.

Тогда спецификация (6) при условии (7) может быть записана в виде:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \ldots + u_t \qquad (8)$$

Неизвестными в этой модели являются α, β_0, λ
Они входят в спецификацию (8) нелинейно, значит, напрямую воспользоваться МНК мы не можем. Постараемся преобразовать модель.

Модель геометрических лагов Койка (Koyck, 1954)

Для начала запишем (8) для предыдущего момента времени:

$$Y_{t-1}=\alpha+\beta_0 X_{t-1}+\beta_0\lambda X_{t-2}+\beta_0\lambda^2 X_{t-3}+\ldots+u_{t-1}$$

Умножим каждое слагаемое этого уравнения на параметр λ и вычтем из уравнения (8). Получим:

$$Y_t-\lambda Y_{t-1}=\alpha\left(1-\lambda\right)+\beta_0 X_t-\beta_0\lambda X_{t-1}+\beta_0\lambda X_{t-1}-$$
$$-\beta_0\lambda^2 X_{t-2}+\beta_0\lambda^2 X_{t-2}-\ldots+u_t-\lambda u_{t-1}$$

Или после приведения подобных и перенесения в правую часть уравнения слагаемого λY_{t-1}:

$$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} \ldots + u_t - \lambda u_{t-1} \qquad (9)$$

К сожалению, модель (9) не может быть оценена МНК, поскольку Y_t и $u_t - \lambda u_{t-1}$ коррелированы.

Тогда перейдем к следующему преобразованию из (8):

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \left(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots \right) + u_t$$

Обозначим $Z_t(\lambda) = \left(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots \right)$

Тогда формально мы перейдем к спецификации

$$Y_t = \alpha + \beta_0 Z_t(\lambda) + u_t \qquad (10)$$

Теперь, придавая с определенным шагом значения параметра λ из промежутка от 0 до 1, будем оценивать модель (10).
В итоге, предпочтение следует отдать той модели, и соответственно, тем значениям α, β_0, λ, когда значение коэффициента детерминации R^2 наибольшее.

***Примерами использования преобразования Койка являются 1) модель адаптивных ожиданий (adaptive expectations) и 2) модель частичной корректировки (partial adjustment). (Самостоятельный разбор!!!)

Временные ряды (основные определения)

Пока будем рассматривать модели временных рядов *в узком смысле*, т.е. модели, которые объясняют поведение временного ряда исходя только из его значений в предыдущие моменты времени.

Будем рассматривать ряд $Y_1, Y_2, ..., Y_T \cdots$ Эти наблюдения рассматриваются как реализация случайных переменных, которые описываются некоторым стохастическим процессом. Анализируемый ряд обладает свойствами этого процесса.

Набор случайных переменных $Y_t, t \in R$ называется <u>стохастическим процессом</u>.

В принципе, математическое ожидание и дисперсия такого процесса может меняться со временем:

$$\mu(Y_t) = \mu(t), Var(Y_t) = \sigma^2(t)$$

Такие процессы называются нестационарными.

Ряд Y_t называется строго стационарным (стационарным в узком смысле), если совместное распределение вероятностей m наблюдений $Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_m}$ такое же, как и для m наблюдений $Y_{t_1+\tau}, Y_{t_2+\tau}, ..., Y_{t_m+\tau}$ для любых значений $m, \tau, t_1, ..., t_m$

Свойства строгого стационарного процесса не меняются при изменении начала отсчета, числовые характеристики такого процесса неизменны.

С практической точки зрения стационарность временного ряда означает:

- отсутствие тренда;
- отсутствие систематических изменений дисперсии;
- отсутствие строго периодических флуктуаций;
- отсутствие систематически изменяющихся взаимозависимостей между уровнями временного ряда.

Большинство реальных экономических процессов не удовлетворяет свойствам стационарности.

Однако можно ввести понятие эргодичности (среднее арифметическое с течением времени сходится к математическому ожиданию), и тогда можно будет оценивать числовые характеристики стохастического процесса по его реализации, т.е. по временному ряду.

Существует несколько подходов к распознаванию стационарности:

- графическое представление временного ряда и визуальная проверка на наличие тренда;
- исследование на наличие автокорреляции;
- тесты на присутствие детерминистского тренда;
- тесты на наличие стохастического тренда (например, тесты на единичный корень).

Спецификация модели временного ряда, как правило, включает *систематическую* составляющую (детерминированную последовательность d_t) и *случайную* составляющую ε_t

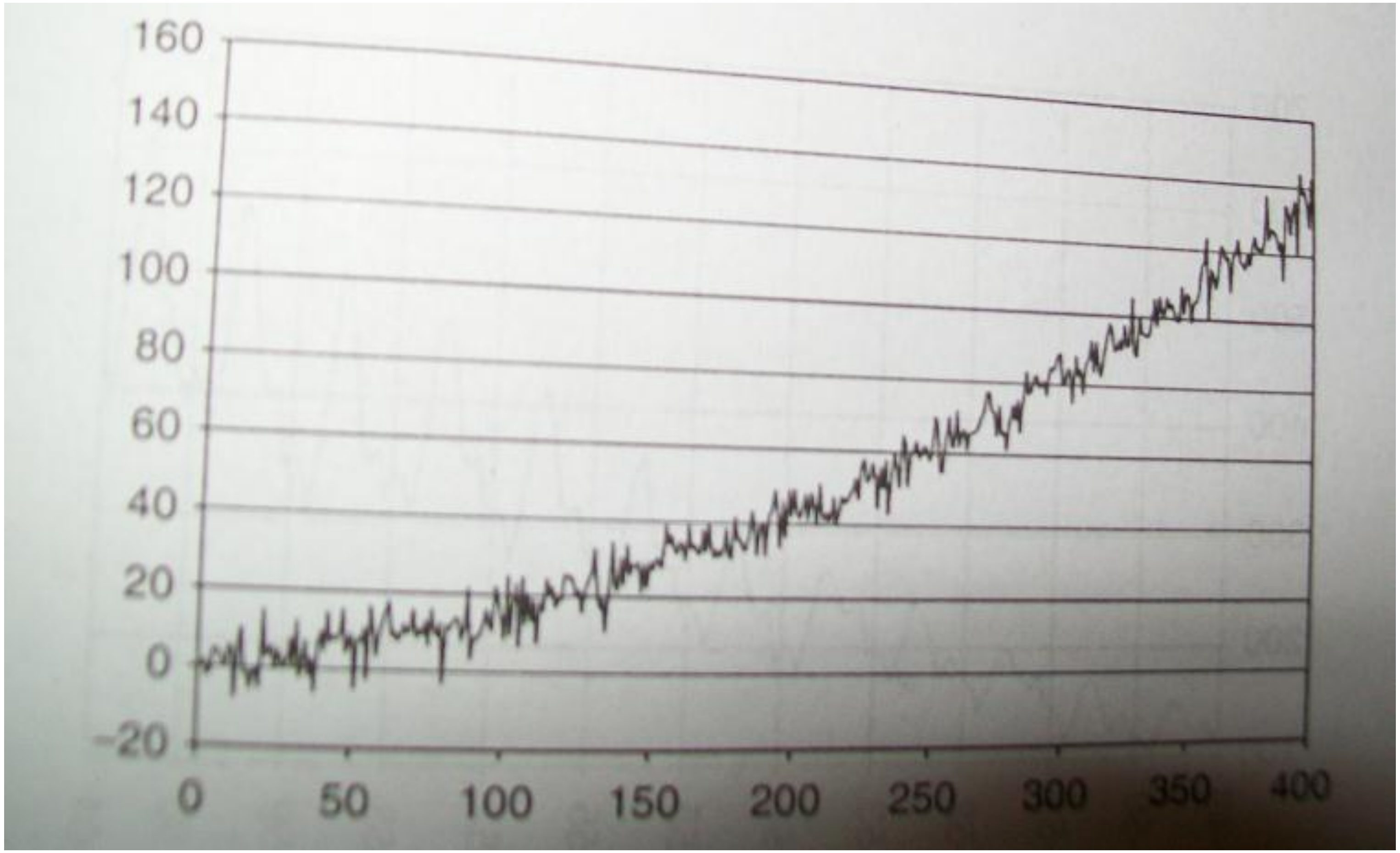
Составляющие временного ряда являются ненаблюдаемыми – это теоретическое разложение его уровней.
Обычно используют две формы декомпозиции временных рядов:

Аддитивная модель $Y_t = d_t + \varepsilon_t$

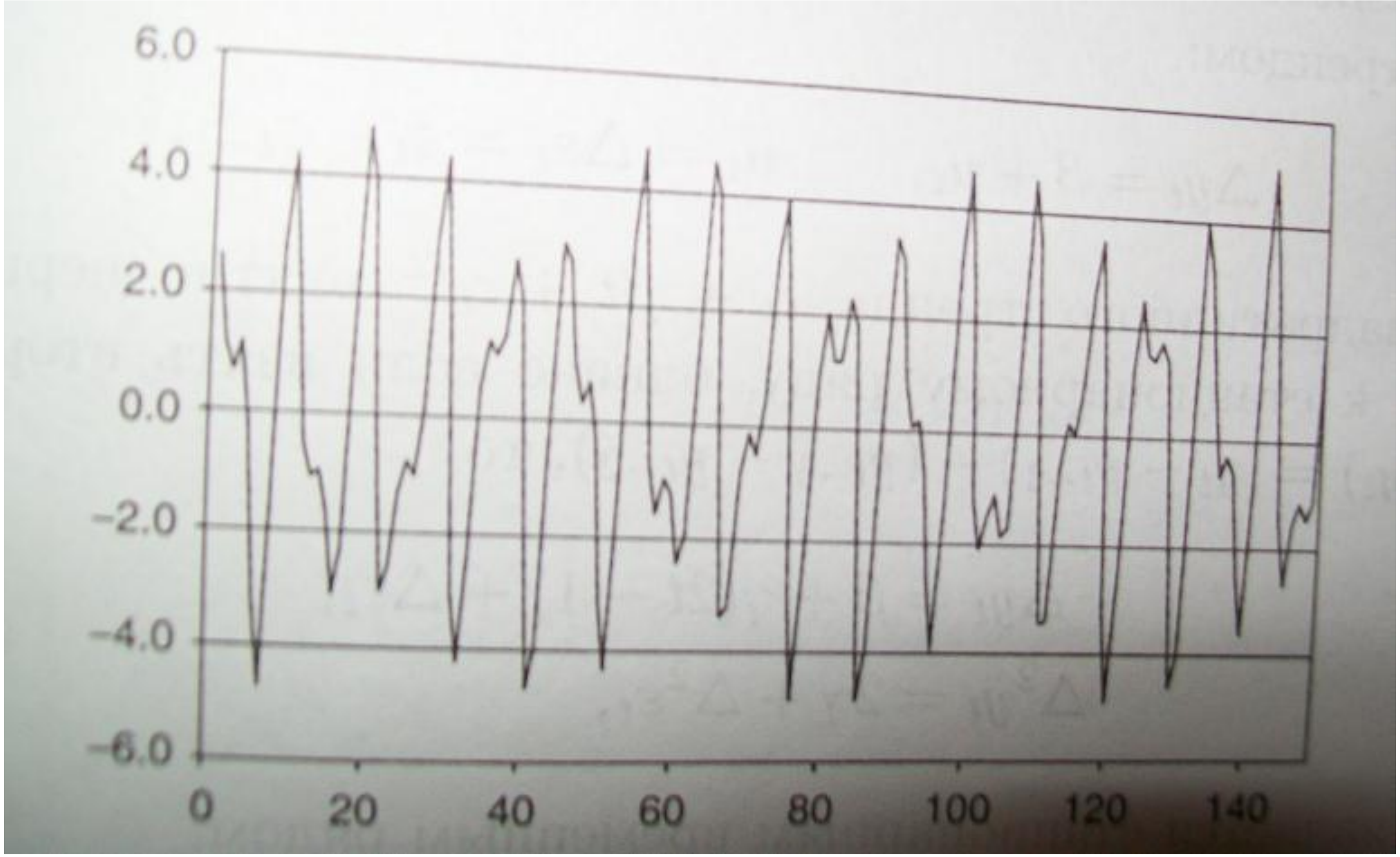
Мультипликативная модель $Y_t = d_t \cdot \varepsilon_t$

Детерминистская часть включает следующие компоненты:
тренд – плавно меняющаяся со временем составляющая, отражающая влияние долговременных факторов, эффект которых сказывается постепенно;
сезонная составляющая – описывает регулярно изменяющееся в течение некоторого периода поведение;
циклическая составляющая – описывает достаточно длительные периоды роста и спада, состоит из циклов, которые меняются по амплитуде и протяженности.

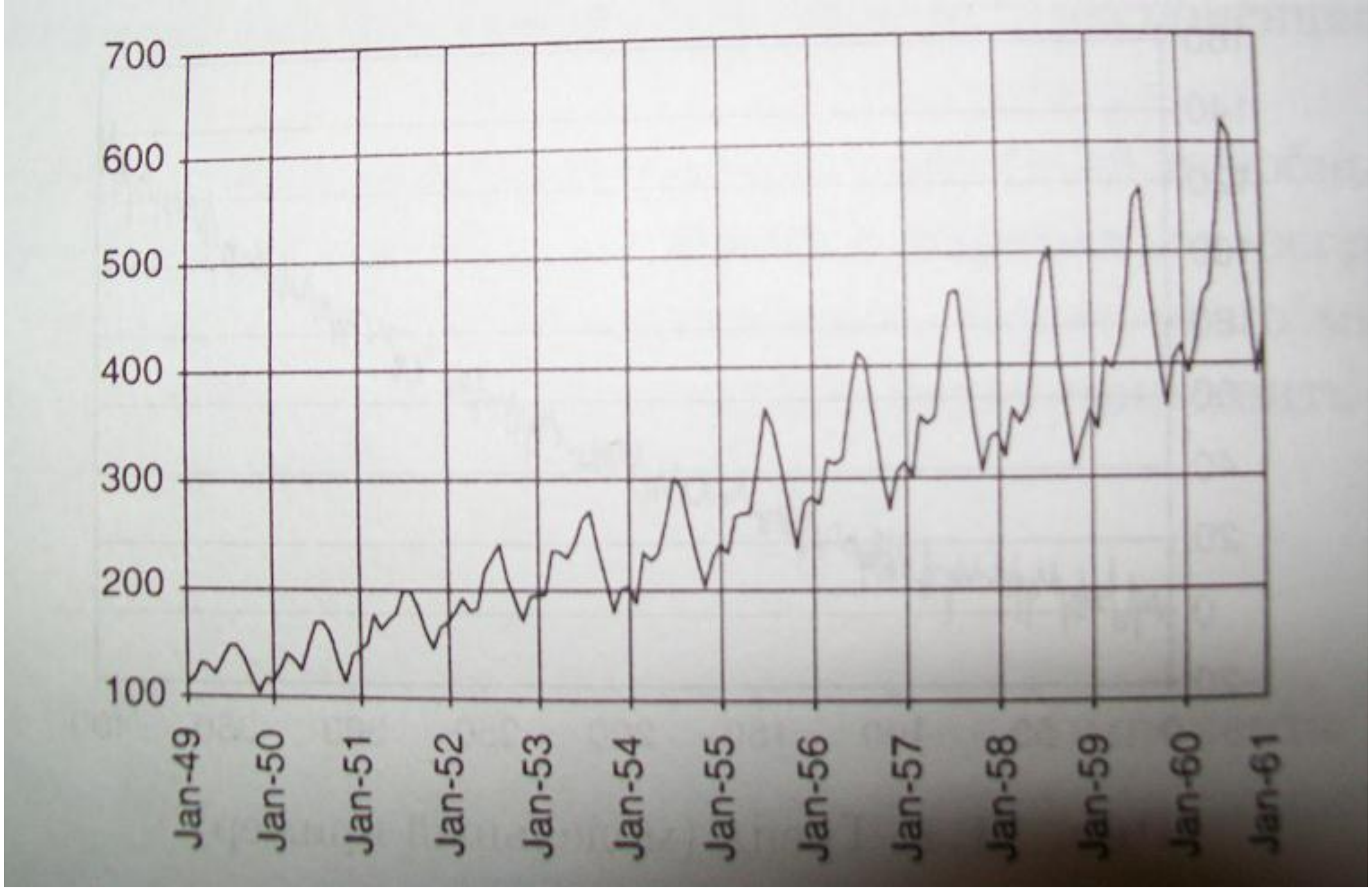
Примеры нестационарных временных рядов



Тренд



Сезонность в числах Вольфа после снятия тренда



Тренд и сезонность в объемах авиаперевозок