

ЛЕКЦИЯ 15

НАРУШЕНИЯ ПРЕДПОСЫЛОК ТЕОРЕМЫ ГАУССА-МАРКОВА: Ч. III. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

1. Причины возникновения автокорреляции
2. Последствия
3. Методы обнаружения
4. Способы устранения

- Какая из предпосылок теоремы Гаусса-Маркова нарушается?

$$E(u_i u_j) = 0, \text{ при } i \neq j$$

Это условие говорит о некоррелированности остатков регрессии

- Когда возникает автокорреляция? Причины:
 1. Характер наблюдений (временные ряды)
 2. Ошибки измерений
 3. Ошибки спецификации модели (невключение значимого регрессора, ошибочная функциональная зависимость и т.п.)

- Последствия автокорреляции

1. Метод наименьших квадратов обеспечивает несмещенные оценки параметров:

$$E(\hat{\beta}) = E(AU) = E(AX\beta) + A \cdot E(u) = \beta$$

Здесь учтено, что

$$E(u) = 0, \quad A = (X'X)^{-1} X'$$

2. При этом оценка дисперсии возмущений смещена, и, как следствие, оценки параметров регрессии уже не будут эффективными

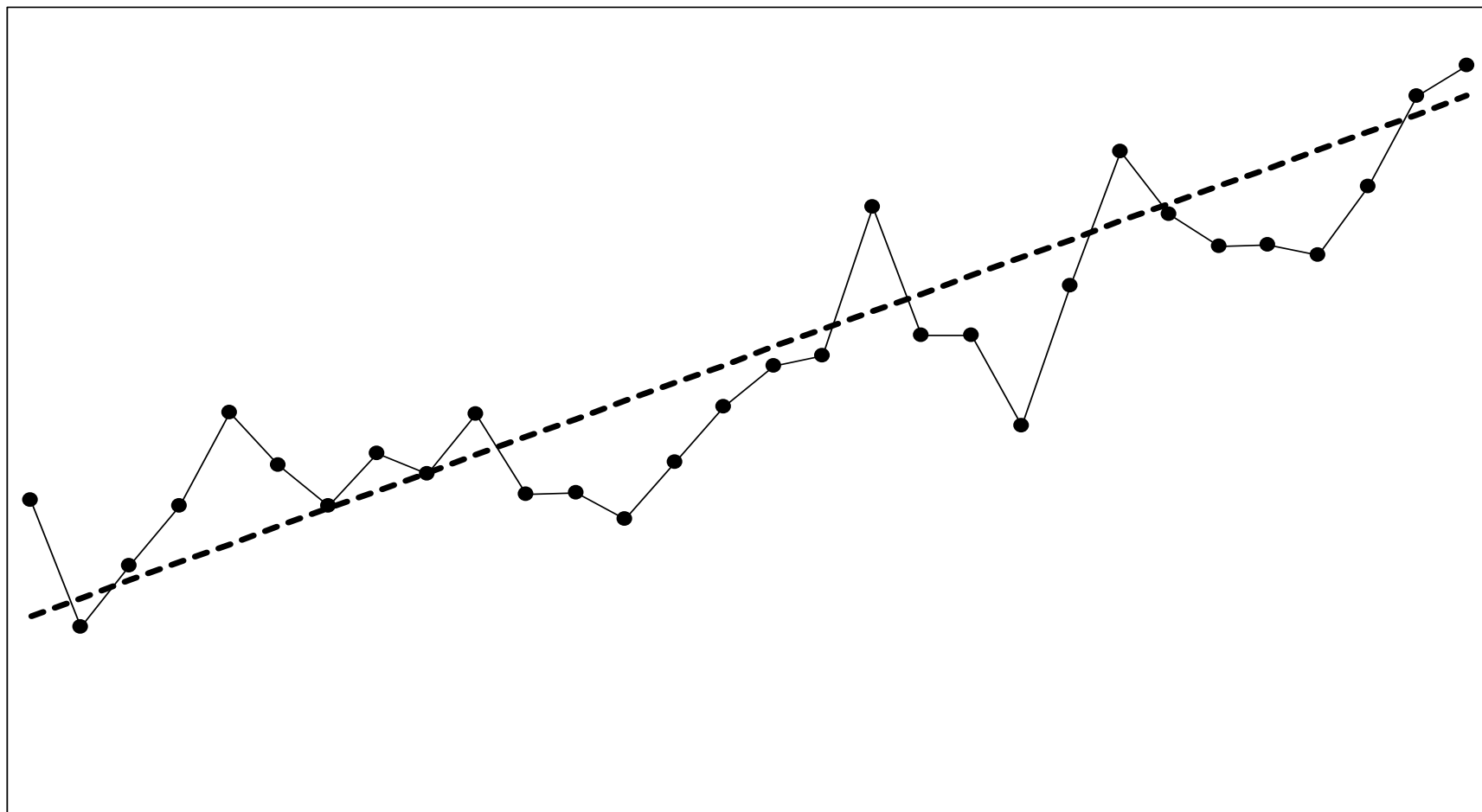
3. Оценки МНК для стандартных отклонений коэффициентов регрессии будут смещенными, чаще всего вниз, т.е. будут заниженными

4. Статистики t и F будут неадекватными. Следствием заниженности оценок стандартных отклонений коэффициентов является завышенность t – статистик

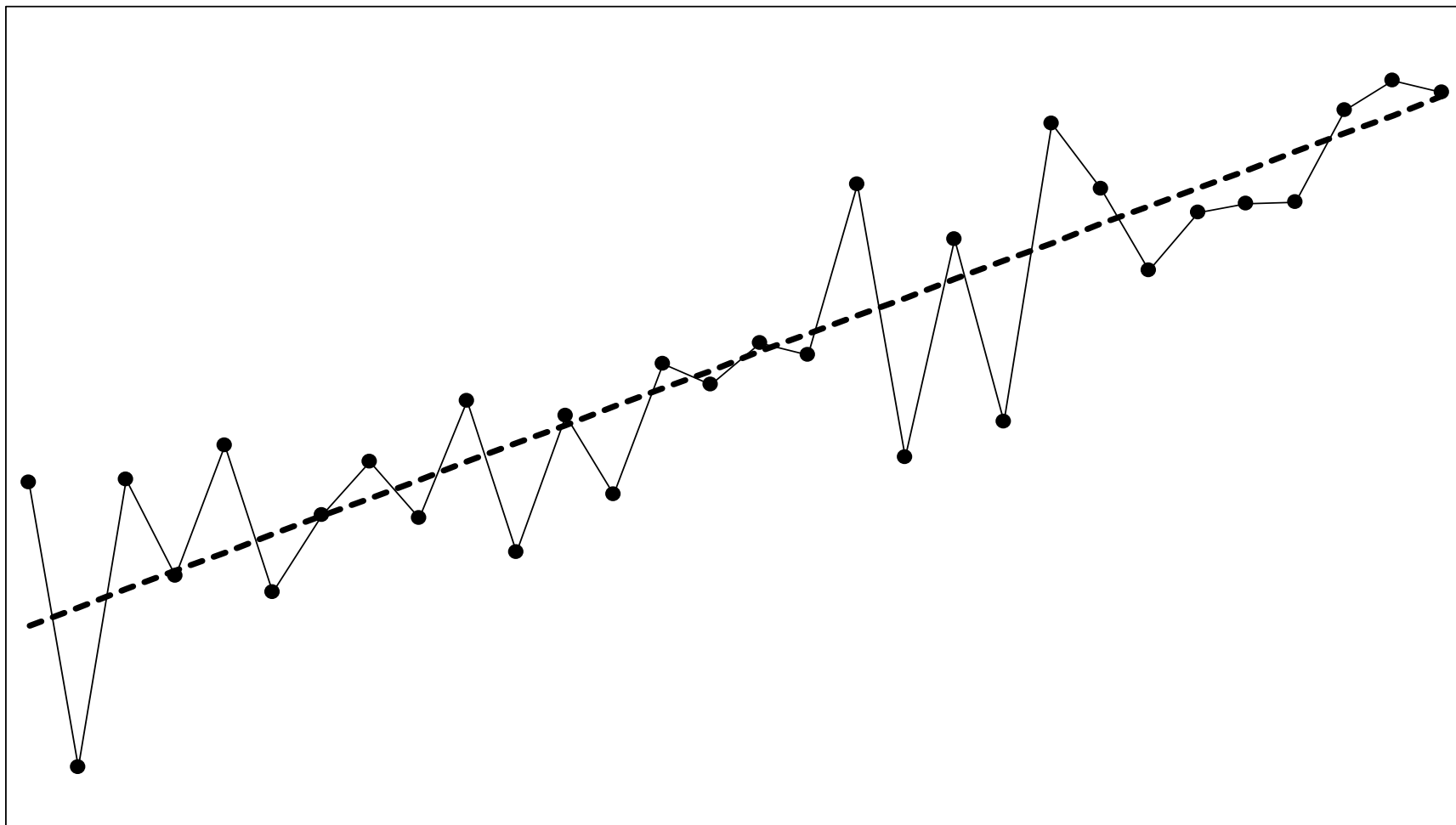
- Как можно обнаружить автокорреляцию?

1. Графическим способом, анализируя графики зависимости Y от t , либо анализируя график зависимости остатков от времени, либо зависимость остатков в текущий момент времени от предыдущего
2. Применяя тест серий
3. Используя статистику Дарбина-Уотсона (Durbin-Watson)

Рисунок, иллюстрирующий наличие положительной автокорреляции



Рисунок, иллюстрирующий наличие отрицательной автокорреляции



- Выявление автокорреляции по поведению остатков в зависимости от времени

1. Положительная автокорреляция: остатки долго сохраняют постоянный знак
2. Отрицательная автокорреляция: остатки, как правило, чередуются по знаку
3. Если в поведении остатков в зависимости от времени нет регулярности – автокорреляция отсутствует

- Выявление автокорреляции по поведению текущих остатков в зависимости от их предыдущих значений
1. При наличии положительной или отрицательной автокорреляции облако точек будет вытянутым в каком-либо направлении
 2. Если автокорреляции нет, то точки будут сосредоточены относительно начала координат

Естественно, кроме графического анализа остатков существуют и формальные тесты, позволяющие установить наличие автокорреляции

Тест серий Вальда-Вольфовица (Wald-Wolfowitz runs test)

Серия остатков – набор последовательных остатков одного знака.

Если в графике остатков есть длинные серии положительных остатков или длинные серии отрицательных остатков, а число серий мало, то имеет место положительная автокорреляция.

Если в графике остатков знаки остатков часто меняются, т.е. число серий велико, то имеет место отрицательная автокорреляция.

H_0 : автокорреляции нет

H_1 : есть автокорреляция первого порядка

Описание алгоритма теста:

- 1) Оцениваются параметры уравнения регрессии.
Сохраняются остатки.
- 2) Отмечаем знаки остатков, их абсолютные значения нас не интересуют.
- 3) n – число наблюдений (и всех знаков)
- 4) N_1 – число знаков «+»
- 5) N_2 – число знаков «-»
- 6) K – число серий

- 7) Для проверки гипотезы используем специальные таблицы, задающие для N_1 и N_2 границы критической области
- 8) Если $K \leq K_{\min}$, то имеет место положительная автокорреляция
- 9) Если $K \geq K_{\max}$, то имеет место отрицательная автокорреляция

В таблице $N_1, N_2 \leq 20$, т.е. $n \leq 40$.

При больших n распределение количества серий K близко к нормальному с параметрами:

$$K \sim N\left(\frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2} + 1; \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)}\right)$$

Можно построить доверительный интервал для K . Если значение тестовой статистики K попадает в этот доверительный интервал, то гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции не отвергается

Формальное описание модели авторегрессии первого порядка (марковская схема)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$\text{AR}(1): \quad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1$$

где $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}$ (некоррелированные при различных $t = 1, \dots, T$, одинаково распределенные случайные величины)

Тест Дарбина-Уотсона (Durbin-Watson test)

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Для больших выборок можно считать, что $DW \rightarrow 2 - 2\rho$

Оценивание по значению статистики DW:

- Автокорреляция отсутствует $DW \rightarrow 2$
- Положительная автокорреляция $DW \rightarrow 0$
- Отрицательная автокорреляция $DW \rightarrow 4$

Проблема с тестом DW состоит в том, что эта статистика зависит не только от числа наблюдений и количества регрессоров, но и от всех значений матрицы X .

Тем не менее, Дарбин и Уотсон показали, что существуют две границы d_u и d_l (u – upper, l – low), которые зависят лишь от n и k и уровня значимости α . При этом следует использовать следующие правила:

$4 - d_l < DW < 4$ есть отрицательная автокорреляция

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$ неопределенность

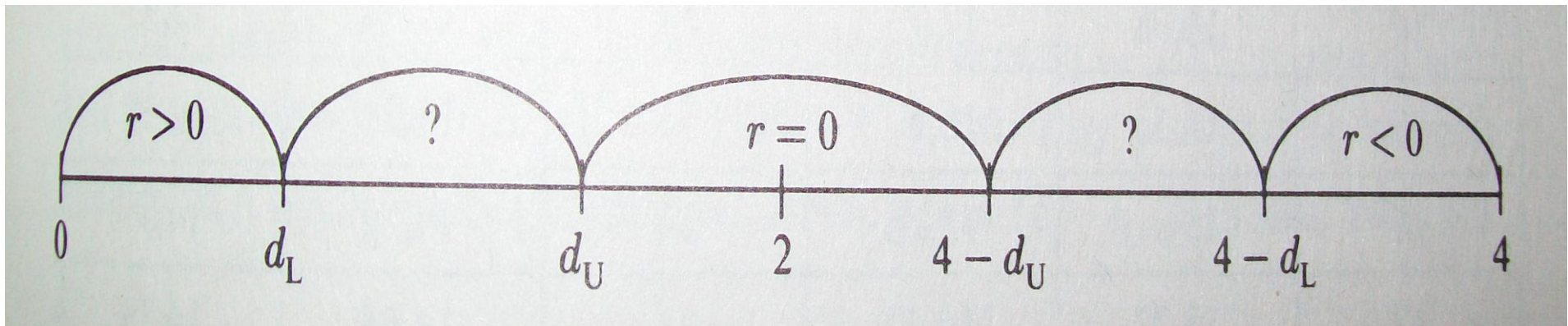
$d_u < DW < 4 - d_u$ гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается

$$d_l < DW < d_u$$

неопределенность

$$0 < DW < d_l$$

есть положительная автокорреляция



• Алгоритм теста:

1. По исходной модели вычисляются остатки
2. Рассчитывается статистика DW

3. По таблицам находим верхнюю и нижнюю границы d_u и d_l
4. Определение интервала, в который попала статистика DW и принятие решения

Важно: предпосылкой теста является нормальность и гомоскедастичность случайных возмущений!!!

- Когда нельзя применять тест DW?

1. В уравнении регрессии отсутствует свободный член
2. Имеется стохастический регрессор (например, Y_{t-1})
3. Возмущения удовлетворяют авторегрессионной схеме не первого, а более высокого порядка